Colégio OBJETIVO

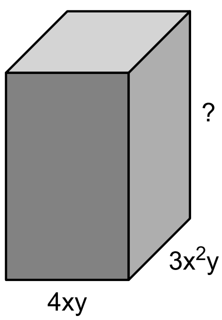
Nome: ____________________ Nº: ______
Endereço: ____________________ Data: ______
Telefone: ____________ *E-mail:* ____________________

Disciplina: **MATEMÁTICA** | Prova: **DESAFIO** | **RESOLUÇÃO**

PARA QUEM CURSA A 1.ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO EM 2019

QUESTÃO 16

Sabendo que o volume do paralelepípedo abaixo é $12x^5y^4$, qual é o monômio que representa sua altura?



a) x^2y^2
b) $12xy$
c) x^8y^6
d) xy
e) $12x^2y^2$

RESOLUÇÃO

Se o volume do paralelepípedo é dado pelo produto da área de sua base pela sua altura ($V = A_{base} \cdot h$), então podemos determinar sua altura pelo quociente entre o volume dado e a área da base $\left(h = \dfrac{V}{A_{base}}\right)$.

Temos que:

$V = 12x^5y^4$ e $A_{base} = 4xy \cdot 3x^2y = 12x^3y^2$, então:

$$h = \frac{V}{A_{base}}$$

$$h = \frac{12x^5y^4}{12x^3y^2} = x^2y^2$$

Resposta: A

QUESTÃO 17

As pessoas presentes à convenção anual de uma editora distribuem-se assim:

	Homens	**Mulheres**
Solteiros	31	28
Casados	19	22

Ao final, será sorteado um prêmio para um dos participantes. A probabilidade de que ganhe uma pessoa solteira do sexo feminino é de:

a) $\frac{11}{50}$

b) $\frac{5}{10}$

c) $\frac{11}{20}$

d) $\frac{7}{25}$

e) $\frac{3}{10}$

RESOLUÇÃO

Observando a tabela, temos que o total de pessoas presentes à convenção é de:
$31 + 19 + 28 + 22 = 100$
Dessas 100 pessoas, 28 são do sexo feminino e solteiras.
A probabilidade de que uma pessoa solteira e do sexo feminino ganhe o presente é de:

$$\frac{28}{100} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

Resposta: D

QUESTÃO 18

André quer fazer uma festa-surpresa para sua amiga Isabelle, mas ela, por ser muito tímida, resolveu não dizer qual é a data do seu aniversário. Após grande insistência de André, Isabelle propôs o seguinte desafio ao amigo:

"Para você descobrir a data do meu aniversário, resolva as seguintes etapas, que envolvem cálculos matemáticos:

1.ª divida o polinômio $10x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 12x$ por $2x$;

2.ª some o resultado obtido na etapa anterior com o polinômio $7x^3 - 6x^2 + 10x - 1$;

3.ª multiplique o resultado obtido por 2.

O dia do meu aniversário é o coeficiente numérico do termo cuja parte literal tem o maior expoente e o mês é o termo independente, ambos resultantes do produto encontrado na 3.ª etapa".

Qual a data de aniversário de Isabelle?

a) 30 de outubro
b) 25 de setembro
c) 24 de outubro
d) 23 de setembro
e) 24 de agosto

RESOLUÇÃO

Resolvendo as etapas, temos:

1.ª) $(10x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 12x) : 2x = 5x^3 + 4x^2 - 2x + 6$

2.ª) $5x^3 + 4x^2 - 2x + 6 + (7x^3 - 6x^2 + 10x - 1) = 12x^3 - 2x^2 + 8x + 5$

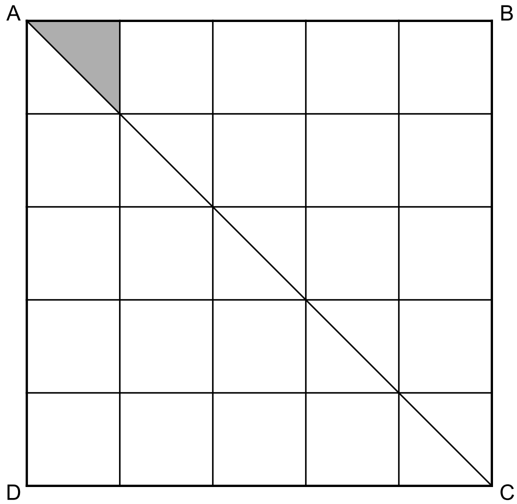
3.ª) $2 \,.\, (12x^3 - 2x^2 + 8x + 5) = 24x^3 - 4x^2 + 16x + 10$

Como o termo de maior expoente é o $24x^3$ (seu coeficiente é o 24) e o termo independente é o 10, podemos afirmar que a data de aniversário de Isabelle é 24 de outubro.

Resposta: C

QUESTÃO 19

O porcentual representado pela área do triângulo sombreado em relação à área do quadrado ABCD é:



a) 0,2%
b) 2%
c) 4%
d) 5%
e) 10%

RESOLUÇÃO

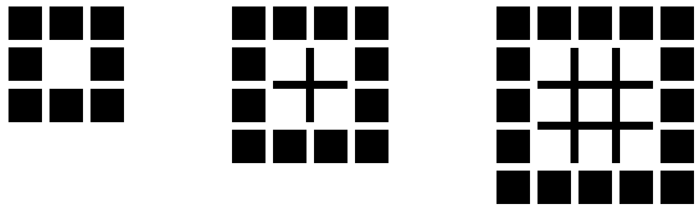
O quadrado em questão tem 25 quadradinhos, que representam 100% de sua área. O triângulo sombreado representa a metade (0,5) de um quadradinho. Então, usando uma regra de três, temos que:

$$\left.\begin{matrix} 25 \text{ —— } 100\% \\ 0{,}5 \text{ —— } x \end{matrix}\right\} 25x = 50\% \Rightarrow x = 2\%$$

Resposta: B

QUESTÃO 20

Com azulejos quadrados brancos e pretos, todos do mesmo tamanho, construímos os seguintes mosaicos:



A regra para construir estes mosaicos é a seguinte: inicialmente, formamos um quadrado com 1 azulejo branco cercado por azulejos pretos; em seguida, outro quadrado, este com 4 azulejos brancos, também cercados por azulejos pretos; e assim sucessivamente.

Com 80 azulejos pretos, a quantidade de azulejos brancos necessária para se fazer uma sequência de mosaicos como esta é representada por um número

a) primo e ímpar ao mesmo tempo.
b) par menor que 55.
c) múltiplo de 10.
d) múltiplo de 5 e de 13 ao mesmo tempo.
e) divisível por 11.

RESOLUÇÃO

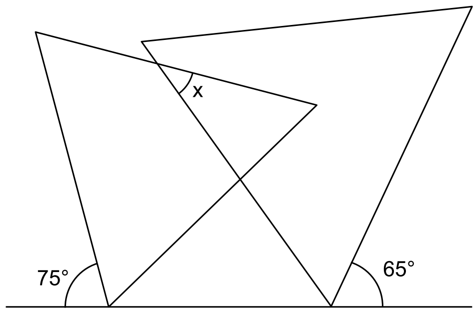
Para a construção dos mosaicos, são usados azulejos pretos e brancos conforme mostra a tabela.

	BRANCO	PRETO	
Soma 3	1	8	Soma 4
Soma 5	4	12	Soma 4
Soma 7	9	16	Soma 4
Soma 9	16	20	Soma 4
	25	24	
	⋮	⋮	

Somando o número de azulejos pretos na sequências 8 + 12 + 16 + 20 + 24, obteremos 80.
Logo, para 80 pretos, teremos 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55 azulejos brancos.
O nº 55 é divisível por 11.
Resposta: E

QUESTÃO 21

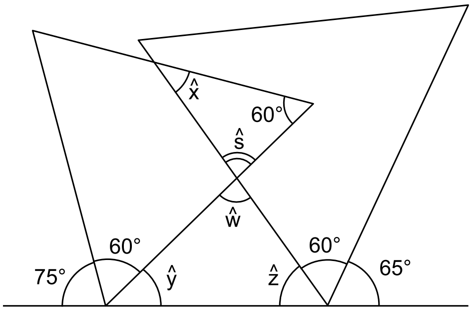
Na figura, os dois triângulos são equiláteros. Qual o valor do ângulo x?



a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°

RESOLUÇÃO

Se os triângulos são equiláteros, então cada ângulo interno mede 60º.



Assim:

$75^o + 60^o + \hat{y} = 180^o \Rightarrow \hat{y} = 45^o$

$60^o + 65^o + \hat{z} = 180^o \Rightarrow \hat{z} = 55^o$

$45^o + 55^o + \hat{w} = 180^o \Rightarrow \hat{w} = 80°$

Os ângulos $\hat{w}$ e $\hat{s}$ são opostos pelo vértice, portanto têm a mesma medida.

Logo, $\hat{s} + \hat{x} + 60^o = 180^o \Rightarrow 80^o + 60^o + \hat{x} = 180^o \Rightarrow \hat{x} = 40^o$

Resposta: B

QUESTÃO 22

Obteremos vinte se adicionarmos ao quadrado do quadrado de um número real o quadrado dele. É correto afirmar que esse número pode ser:

a) –5 ou 4

b) –2 ou 2

c) 3 ou $\frac{1}{2}$

d) 7 ou 3

e) –5 ou 3

RESOLUÇÃO

Chamando o número em questão de x, temos:
– o quadrado desse número é igual a x^2;
– o quadrado do quadrado do número é igual a $(x^2)^2 = x^4$.
Então, $x^4 + x^2 = 20$ (equação biquadrada).
Substituindo x^4 por y^2 e x^2 por y, temos:

$y^2 + y - 20 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 (-20)$

$\Delta = 81$

$$y = \frac{-1 \pm 9}{2} \begin{cases} y = -5 \\ y = 4 \end{cases}$$

Se $x^2 = y$ e $y = -5$, então:

$x^2 = -5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-5} \Leftrightarrow \nexists$ **x real**

Se $x^2 = y$ e $y = 4$, então:

$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$

Resposta: B

QUESTÃO 23

Júlia tem 100 peças de LEGO do tipo 2 x 2, iguais à da figura I. Sobre uma placa, quer construir uma torre maciça com a forma de um prisma de base quadrada.

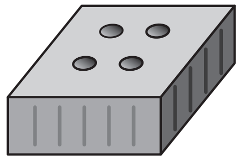


Figura I

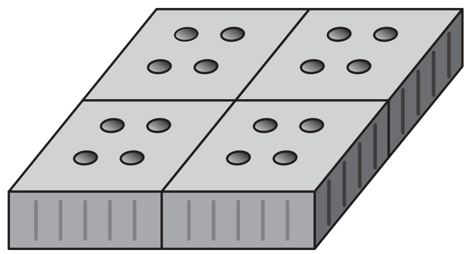


Figura II

Utilizando 64 peças, conseguiu construir quatro prismas diferentes, de base quadrada, colocando as peças da seguinte forma:

Prisma I: 64 camadas sobrepostas, tendo cada camada uma única peça, como na figura I.

Prisma II: 16 camadas sobrepostas, tendo cada camada 4 peças, como na figura II.

Prisma III: 4 camadas sobrepostas, tendo cada camada 16 peças.

Prisma IV: 1 única camada com 64 peças.

Utilizando as 100 peças, quantos prismas diferentes, de base quadrada, conseguirá construir?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

RESOLUÇÃO

O número de peças de cada camada deve ser quadrado perfeito e divisor de 100. Nesse caso, as possibilidades serão quatro: 1, 4, 25, 100. Assim, os resultados possíveis serão:
100 camadas de 1 peça; 25 camadas de 4 peças;
4 camadas de 25 peças; 1 camada de 100 peças.
Resposta: C

QUESTÃO 24

Somando minha idade (x) com a de minha mãe (y), temos a idade de minha avó. Eu tenho um terço da idade de minha mãe e minha avó tem ($2^3.3^2$) anos. Dessa forma, é correto afirmar que:

a) $18 \leq x < 19$
b) $10 \leq x < 17$
c) $40 \leq y \leq 50$
d) $30 < y < 50$
e) $20 \leq x < 30$

RESOLUÇÃO

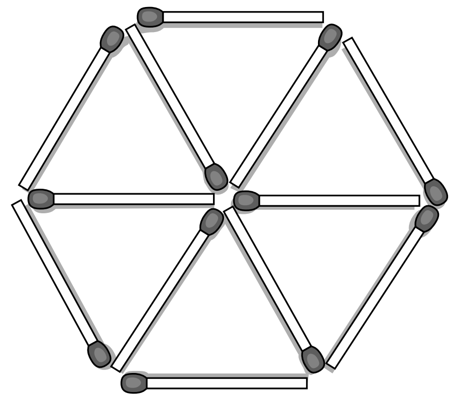
Chamando minha idade de x, a idade de minha mãe de y e sabendo que $2^3 \cdot 3^2 = 72$, temos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 72 & (1) \\ x = \dfrac{y}{3} & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 72 & (1) \\ y = 3x & (2) \end{cases}$$

Substituindo o valor de y da equação (2) na equação (1), temos:
$x + 3x = 72 \Leftrightarrow 4x = 72 \Leftrightarrow x = 18$ (minha idade)
Se $y = 3x$, então:
$y = 3 \cdot 18$
$y = 54$ (idade de minha mãe)
Resposta: A

QUESTÃO 25

Usando palitos de fósforos, podemos construir um hexágono regular, formado por seis triângulos equiláteros unitários, como mostra a figura.

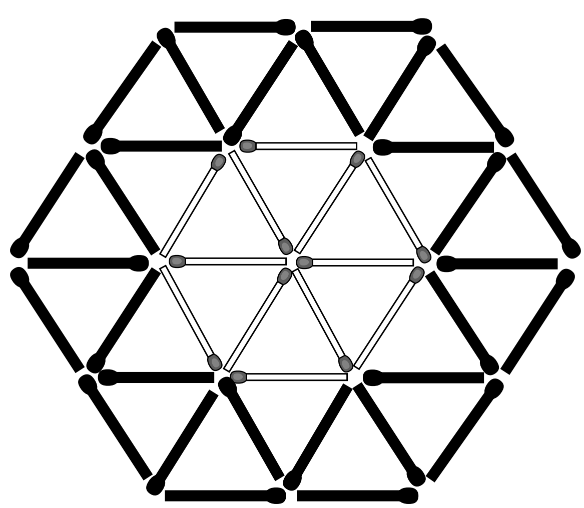


Juntando mais palitos a esse hexágono, queremos obter outro hexágono regular com o quádruplo da área desse, também formado por triângulos equiláteros unitários. Quantos palitos deverão ser acrescentados?

a) 12
b) 24
c) 30
d) 36
e) 48

RESOLUÇÃO

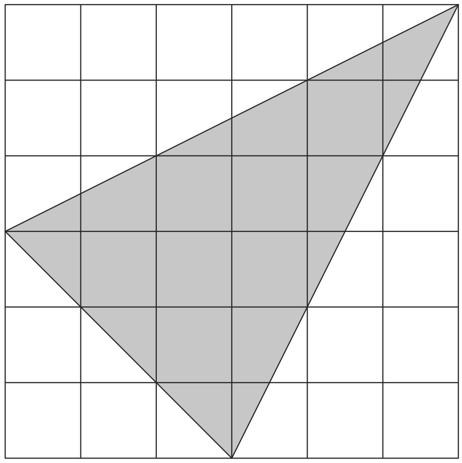
Para quadruplicar a área, devemos dobrar o lado do hexágono, como mostra a figura.



Assim, a quantidade de palitos adicionais (em preto na figura) é 30.
Resposta: C

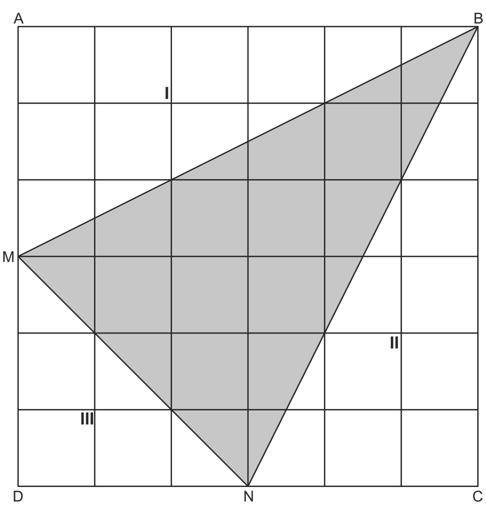
QUESTÃO 26

Se todos os quadradinhos da retícula têm 1 cm de lado, então a área da figura escurecida, em centímetros quadrados, é igual a:



a) 12,5 b) 13,0 c) 13,5 d) 14,0 e) 14,5

RESOLUÇÃO



Sendo:
S_I a área do triângulo ABM,
S_{II} a área do triângulo BCN,
S_{III} a área do triângulo NDM,
S a área do triângulo BNM e
S_Q a área do quadrado ABCD,
tem-se:

$$S = S_Q - S_I - S_{II} - S_{III} = 6 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 6}{2} - \frac{3 \cdot 6}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} \Leftrightarrow S = 36 - 9 - 9 - 4{,}5 \Leftrightarrow S = 13{,}5$$

Resposta: C

QUESTÃO 27

O cubo de menos dois, somado ao quadrado de menos quatro, é igual ao

a) oposto do cubo de menos dois.
b) oposto do quadrado de menos dois.
c) inverso de dois ao cubo.
d) oposto do quadrado de menos quatro.
e) oposto do inverso de menos dois.

RESOLUÇÃO

Em linguagem matemática, o cubo de menos dois é escrito: $(-2)^3$, e o quadrado de menos quatro: $(-4)^2$.

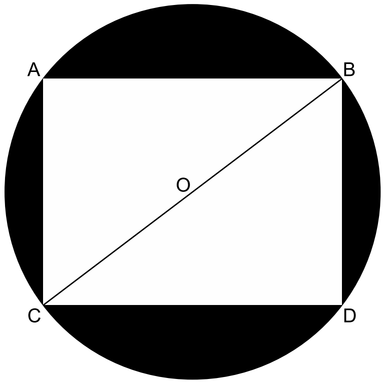
Assim:

$(-2)^3 + (-4)^2 = -8 + 16 = 8 = 2^3 = -(-2)^3$, que é o oposto do cubo de menos dois.

Resposta: A

QUESTÃO 28

A figura representa um canteiro de forma circular com 5 metros de raio.



O canteiro tem uma região retangular que se destina à plantação de flores e uma outra região, sombreada na figura, na qual se plantará grama. Na figura, O é o centro do círculo, OB é o raio, o retângulo está inscrito no círculo e $\overline{CD}$ mede 8 metros.

A área da região retangular destinada à plantação de flores é de:

a) $50m^2$

b) $48m^2$

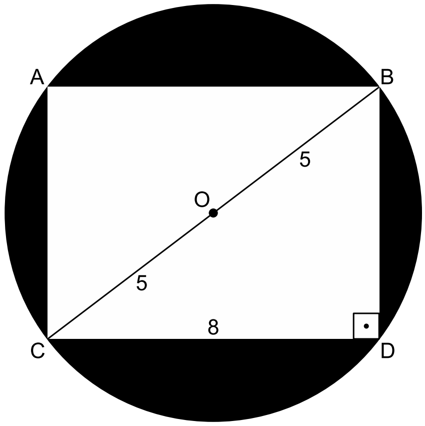
c) $46m^2$

d) $44m^2$

e) $42m^2$

RESOLUÇÃO

Do enunciado, temos a figura:



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BDC, em metros, temos que:

$(BD)^2 + 8^2 = 10^2$

$(BD)^2 = 100 - 64$

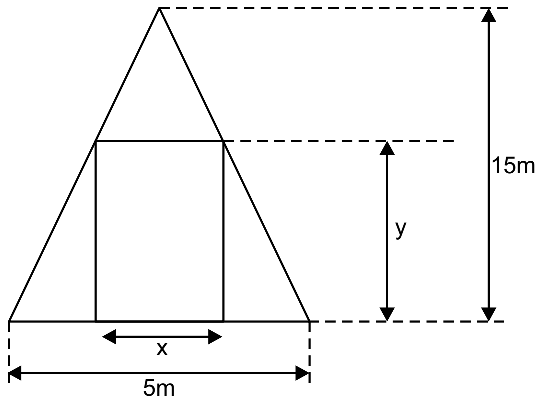
BD = 6

A área da região retangular é dada pelo produto da base com a altura. Se a base é 8m e a altura é 6m, então a área é igual a 8m . 6m = 48 m^2.

Resposta: B

QUESTÃO 29

Em um terreno de formato triangular, deseja-se construir uma casa com formato retangular. Determine **x** e **y** de modo que a área construída seja máxima.



a) x = 2,5m e y = 7,5m
b) x = 3m e y = 9m
c) x = 4,5m e y = 10,5m
d) x = 5m e y = 15m
e) x = 3m e y = 10m

RESOLUÇÃO

I) Por semelhança de triângulos, e em metros, podemos afirmar que:

$$\frac{x}{5} = \frac{15 - y}{15} \Leftrightarrow 3x = 15 - y \Leftrightarrow y = 15 - 3x$$

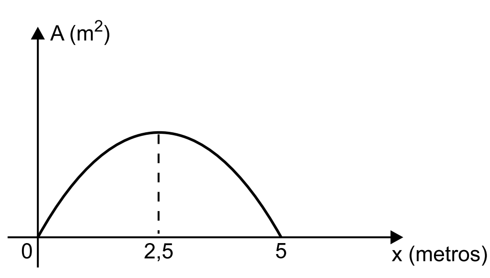
II) A área do retângulo é dada por $A = x \,.\, y = x \,.\, (15 - 3x) = -3 \,.\, x^2 + 15 \,.\, x$

III) A área é uma função do 2º grau cujo gráfico é uma parábola com concavidade para baixo (a < 0).

Portanto, a área máxima ocorre para

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-15}{-6} = 2,5$$

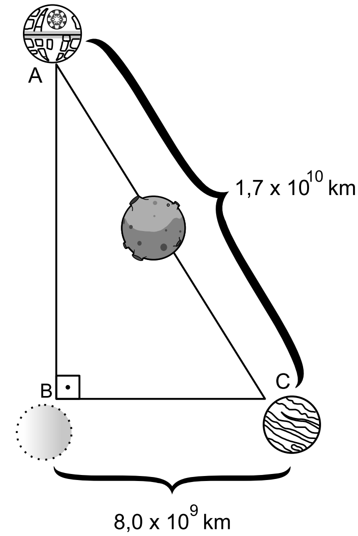
IV) Para x = 2,5, temos: $y = 15 - 3 \,.\, (2,5) = 15 - 7,5 = 7,5$



Resposta: A

QUESTÃO 30

"A Estrela da Morte é uma arma ícone da série cinematográfica *Star Wars*. De formato esférico, ela era considerada similar a uma lua. (...)
Admita que ela precisasse posicionar-se de maneira a realizar um ataque de máxima eficiência ao Planeta C. Inicialmente, a estação espacial encontrava-se no ponto A e, entre ela e o Planeta C, havia um grande asteroide, por isso necessitou ir para o ponto B, de modo a poder avistar perfeitamente o Planeta C, conforme a figura."



Assinale a alternativa que representa a distância, em quilômetros, que a Estrela da Morte teve de percorrer para chegar ao ponto B.

a) $1,5 . 10^9$
b) $2,5 . 10^9$
c) $3,5 . 10^9$
d) $1,5 . 10^{10}$
e) $2,5 . 10^{10}$

RESOLUÇÃO

De acordo com a ilustração, temos um triângulo retângulo de hipotenusa $1,7 . 10^{10}$km e cateto $8 . 10^9$km.
Chamando de x a medida do outro cateto, transformando a medida da hipotenusa de $1,7 . 10^{10}$ para $1,7 . 10^1 . 10^9 = 17 . 10^9$ e aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:
(10^9 é um fator comum entre as medidas dos catetos e da hipotenusa e portanto podemos não utilizá-lo no desenvolvimento)
$17^2 = x^2 + 8^2 \Leftrightarrow x^2 = 17^2 - 8^2 \Leftrightarrow x^2 = 289 - 64 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = \pm 15 \Rightarrow x = 15$, pois $x > 0$
Logo, a distância pedida, em km, é de $15 . 10^9 = 1,5 . 10 . 10^9 = 1,5 . 10^{10}$ km
Resposta: D