Colégio OBJETIVO

Nome: ______ Nº: ______
Endereço: ______ Data: ______
Telefone: ______ *E-mail:* ______

Disciplina: **MATEMÁTICA** | Prova: **DESAFIO** | **RESOLUÇÃO**

PARA QUEM CURSA A 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO EM 2019

QUESTÃO 16

Calculando $a \,.\, \sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}}$, obtém-se:

a) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{a}}$ b) $4a^{-1}$ c) a^{-1} d) $\sqrt[8]{a}$ e) $\sqrt{a^{-1}}$

RESOLUCÃO

$$\mathbf{a\,.\sqrt{a^{-1}.\sqrt{a^{-1}.\sqrt{a^{-1}}}} = \sqrt{a^2.\,a^{-1}.\sqrt{a^{-1}.\sqrt{a^{-1}}}} = \sqrt{a\,.\sqrt{a^{-1}.\sqrt{a^{-1}}}} =}$$

$$\mathbf{= \sqrt{\sqrt{a^2.\,a^{-1}.\sqrt{a^{-1}}}} = \sqrt{\sqrt{a\sqrt{a^{-1}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a^2\,.\,a^{-1}}}} = \sqrt[8]{a}}$$

Resposta: D

QUESTÃO 17

O valor da expressão $\dfrac{\sqrt{a}\,.\sqrt{a+\sqrt{a}}\,.\sqrt{a-\sqrt{a}}\,.\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2-1}}$, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, é:

a) $\sqrt{a+1}$ b) a c) $a-1$ d) $a+1$ e) $\sqrt{a-1}$

RESOLUCÃO

$$\mathbf{\frac{\sqrt{a}\,.\sqrt{a+\sqrt{a}}\,.\sqrt{a-\sqrt{a}}\,.\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{\sqrt{a\,.\,(a+\sqrt{a})\,.\,(a-\sqrt{a})\,.\,(a+1)}}{\sqrt{a^2-1}} =}$$

$$\mathbf{= \sqrt{\frac{a\,.\,(a^2-(\sqrt{a})^2)\,(a+1)}{(a+1)\,(a-1)}} = \sqrt{\frac{a^2\,.\,(a-1)}{(a-1)}} = \sqrt{a^2} = a}$$

Resposta: B

QUESTÃO 18

Se $\dfrac{1}{x^3 + x + 1} = \dfrac{27}{37}$, então $\dfrac{1}{x^3 + x + 2}$ é igual a

a) $\dfrac{27}{84}$ b) $\dfrac{27}{64}$ c) $\dfrac{27}{38}$ d) $\dfrac{28}{37}$ e) $\dfrac{64}{27}$

RESOLUCÃO

$$\frac{1}{x^3 + x + 1} = \frac{27}{37} \Leftrightarrow x^3 + x + 1 = \frac{37}{27} \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = \frac{37}{27} + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x + 2 = \frac{64}{27} \Leftrightarrow \frac{1}{x^3 + x + 2} = \frac{27}{64}$$

Resposta: B

QUESTÃO 19

Para dar R\$ 1,80 de troco a um cliente, o caixa de um supermercado pretende usar exatamente 20 moedas. Se ele dispõe apenas de moedas de 5 centavos, 10 centavos e 25 centavos, de quantos modos distintos ele pode compor tal quantia?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

RESOLUCÃO

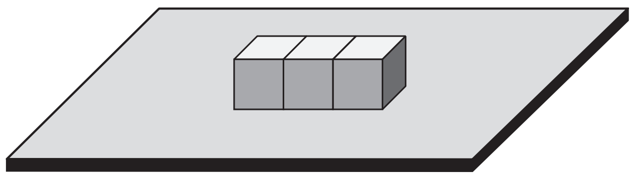
Sendo x, y e z, naturais e respectivamente as quantidades de moedas de R\$ 0,05, R\$ 0,10 e R\$ 0,25 tem-se:

$$\begin{cases} 0,05x + 0,10y + 0,25z = 1,80 \\ x + y + z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 36 \\ x + y + z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ y + 4z = 16 \end{cases}$$

Este sistema admite as seguintes trincas (x, y, z) de soluções naturais: (4; 16; 0), (7; 12; 1), (10; 8; 2), (13; 4; 3) e (16; 0; 4). Assim, são possíveis *cinco* formas diferentes de dar o troco.
Resposta: C

QUESTÃO 20

Em um dado comum, a soma dos números de pontos desenhados em quaisquer duas faces opostas é sempre igual a 7. Três dados comuns e idênticos são colados por faces com o mesmo número de pontos. Em seguida, os dados são colados sobre uma mesa não transparente, como mostra a figura.



Sabendo-se que a soma dos números de pontos de todas as faces livres é igual a 36, a soma dos números de pontos das três faces que estão em contato com a mesa é igual a

a) 13
b) 14
c) 15
d) 16
e) 18

RESOLUCÃO

A soma de todas as faces dos três cubos é 3 . (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 63.
A soma das faces coladas é 2. 7 = 14 e a soma das faces livres é 36. A soma dos números de pontos das três faces em contato com a mesa é 63 – 14 – 36 = 13
Resposta: A

QUESTÃO 21

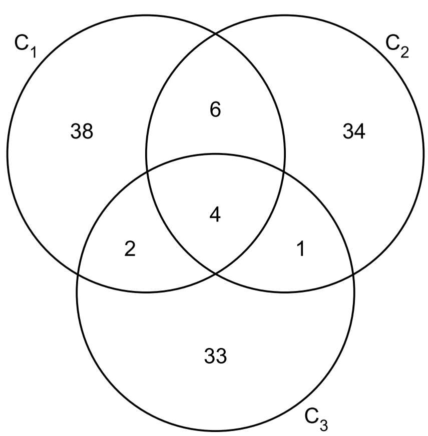
Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas.

Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C_1. Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

a) 135
b) 126
c) 118
d) 114
e) 110

RESOLUCÃO

Os dados da questão permitem montar o seguinte diagrama de Venn:



A quantidade total de originais é
38 + 6 + 34 + 2 + 4 + 1 + 33 = 118
Resposta: C

QUESTÃO 22

Se $f(x) = 3x + 5$ e $g(x) = \dfrac{f(x) + 8}{f(x) - 4}$, o valor de g(1) é

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16

RESOLUCÃO

$$\mathbf{f(1) = 3 \cdot 1 + 5 = 8}$$

$$\mathbf{g(1) = \dfrac{f(1) + 8}{f(1) - 4} = \dfrac{8 + 8}{8 - 4} = 4}$$

Resposta: C

QUESTÃO 23

Para todo x pertencente aos reais, a função $f(x) = -x^2 + 4x - m^2$ é sempre estritamente negativa. Então:

a) $m = 0$

b) $-2 < m < 0$

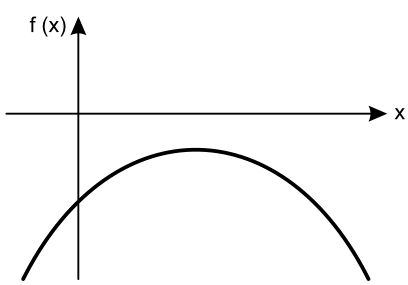
c) $0 < m < 2$

d) $m < 0$ ou $m > 2$

e) $m < -2$ ou $m > 2$

RESOLUCÃO

Para que a função seja sempre estritamente negativa, seu gráfico deverá ser do tipo

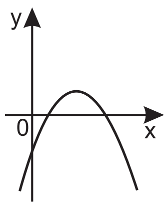


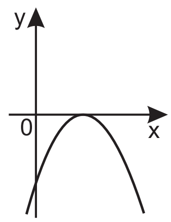
Desta forma, $\mathbf{\Delta < 0 \Leftrightarrow 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-m^2) < 0 \Leftrightarrow}$
$\mathbf{16 - 4m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -2}$ **ou** $\mathbf{m > 2}$

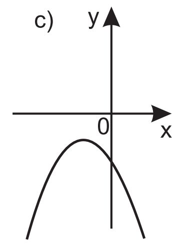
Resposta: E

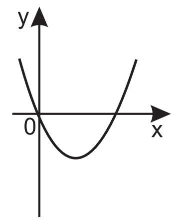
QUESTÃO 24

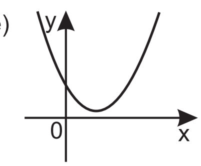
Considere que a representação gráfica da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = mx^2 - x + n$, com m e n reais, é uma parábola com ordenada do vértice maior que n. Se $m.n > \frac{1}{4}$, uma possível representação gráfica de f é

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

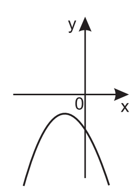
RESOLUCÃO

1) $\left.\begin{array}{l} \Delta = (-1)^2 - 4 \,.\, m \,.\, n = 1 - 4mn \\ m \,.\, n > \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - 4mn < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta < 0$

2) A ordenada do vértice é $y_v = \dfrac{-\Delta}{4m} = \dfrac{4mn - 1}{4m} > n$

Para m > 0 teriamos 4mn – 1 > 4 mn (impossível)
Para m < 0 teriamos 4mn – 1 < 4mn, sempre verdadeira.

3) de (1) e (2) temos que o gráfico de f é do tipo



Resposta: C

QUESTÃO 25

Uma instituição financeira oferece um tipo de aplicação tal que, após t meses, o montante relativo ao capital (C) aplicado é dado por $M(t) = C \,.\, 2^{0,04t}$, em que C > 0. O menor tempo possível para quadruplicar uma certa quantia aplicada nesse tipo de aplicação é

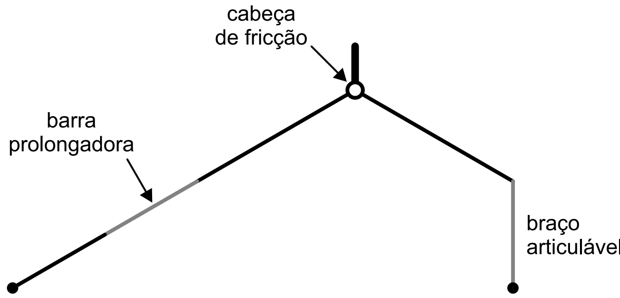
a) 5 meses.
b) 2 anos e 6 meses.
c) 4 anos e 2 meses.
d) 6 anos e 4 meses.
e) 8 anos e 5 meses.

RESOLUCÃO

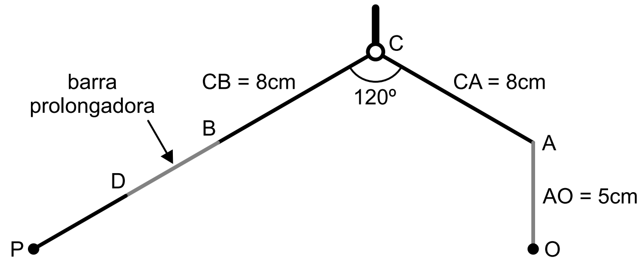
Para quadruplicar o capital aplicado, devemos ter
$M(t) = C.\, 2^{0,04t} = 4C \Leftrightarrow 2^{0,04t} = 2^2 \Rightarrow 0,04t = 2 \Leftrightarrow t = 50$
50 meses equivalem a 4 anos e 2 meses.
Resposta: C

QUESTÃO 26

O compasso é um instrumento usado no desenho artístico e no desenho técnico. Um exemplo de compasso especial é o **compasso articulável**, que possui cabeça de fricção para ajuste preciso e suave do raio, um braço articulável e outro com barra prolongadora do braço, onde fica a ponta seca, conforme ilustra a figura abaixo.



O esquema abaixo mostra um compasso articulável ajustado de modo que o braço articulável $\overline{AO}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e $\overline{OP}$.



Para essa configuração, a medida, em cm, do raio da circunferência traçada com o compasso é

a) $5\sqrt{3}$

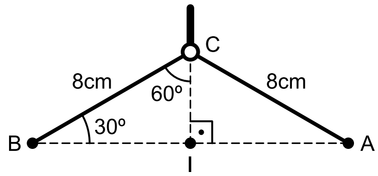
b) $8\sqrt{3}$

c) $9\sqrt{3}$

d) $13\sqrt{3}$

e) $15\sqrt{3}$

RESOLUÇÃO

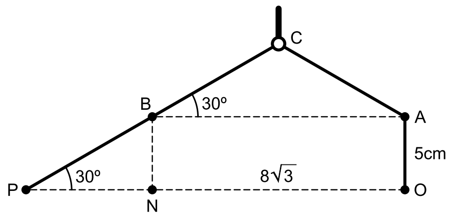


1) No triângulo BCI : $BI = 8 \cdot \cos 30º = 8\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

2) $AB = 2BI = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

3) $NO = AB = 8\sqrt{3}$

4)



No triângulo BPN : $\text{tg } 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{BN}{PN} = \dfrac{5}{PN} \Leftrightarrow PN = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$

5) $OP = PN + NO = 5\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$

Resposta: D

QUESTÃO 27

Recentemente, uma banda internacional realizou um *show* no Brasil, no qual o valor arrecadado com a venda de ingressos totalizou 1,75 milhão de dólares. Esse valor arrecadado tem como destino o pagamento de impostos, o pagamento de custos fixos, e o restante é dividido entre a agência que promoveu o *show* e a banda que o executou. Nesse *show*, o valor destinado aos custos fixos foi o triplo do valor utilizado para o pagamento de impostos. Já a agência que promoveu o *show* recebeu um sexto do valor destinado à banda.

Sabendo-se que o valor destinado ao pagamento de impostos e custos fixos, juntos, supera o valor destinado à agência e à banda em 770 mil dólares, o percentual do valor arrecado que foi destinado à banda é igual a

a) 61%
b) 10%
c) 24%
d) 37%
e) 28%

RESOLUÇÃO

1) **Sendo i, c, a e b os valores destinados ao imposto, ao custo fixo, à agência e à banda, respectivamente, temos:**

$$\begin{cases} i + c + a + b = 1\,750\,000 \quad \text{(I)} \\ c = 3i \quad \text{(II)} \\ a = \dfrac{1}{6}b \quad \text{(III)} \\ i + c = a + b + 770\,000 \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

2) **Substituindo (IV) em (I), temos:** $a + b + 770\,000 + a + b = 1\,750\,000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(a + b) = 980\,000 \Leftrightarrow a + b = 490\,000$ (V)

3) **Substituindo (III) em (V), temos:** $\dfrac{1}{6}b + b = 490\,000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{7b}{6} = 490\,000 \Leftrightarrow b = 420\,000$

4) $\dfrac{b}{\text{total}} = \dfrac{420\,000}{1\,750\,000} = 0{,}24 = 24\% \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 24\%\ \text{total}$

Resposta: C

QUESTÃO 28

Uma empresa produz determinada peça que pode ser feita em três diferentes máquinas, chamadas aqui de A, B e C. Parte dessas peças produzidas necessita de uma retífica no acabamento final. A tabela mostra a distribuição da produção em cada máquina e o percentual médio de peças que precisam passar por retífica.

Máquina	Fração da produção total	Percentual médio de retíficas na produção
A	$\frac{7}{10}$	1%
B	$\frac{1}{4}$	3%
C	$\frac{1}{20}$	5%

Ao final de um turno de produção, foi observado um aumento no número de peças que necessitaram de retífica, pois 4% do total das peças produzidas foram retificadas.
Após uma análise interna, constatou-se que as máquinas A e B tiveram um funcionamento normal, conforme descrito na tabela. No entanto, a máquina C apresentou defeito, elevando o percentual de peças retificadas.
Portanto, nesse turno, o percentual de retíficas na produção da máquina C foi
a) 9,2 vezes o valor da tabela.
b) 2,9 vezes o valor da tabela.
c) 7,0 vezes o valor da tabela.
d) 1,4 vez o valor da tabela.
e) 10,2 vezes o valor da tabela.

RESOLUÇÃO

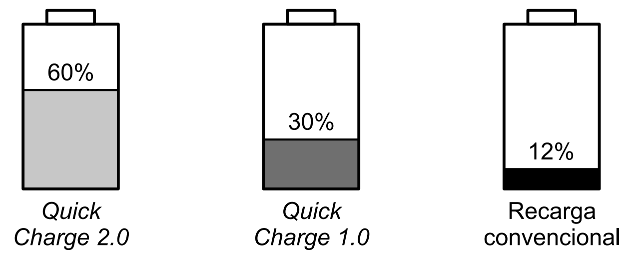
Se x for o percentual de retíficas na produção da máquina C, e T a produção total, então:

$$1\% \,.\, \frac{7}{10} T + 3\% \,.\, \frac{1}{4} \,.\, T + x\% \,.\, \frac{1}{20} \,.\, T = 4\% \,.\, T$$

$0,007 + 0,\ 0075 + 0,05 \,.\, x\% = 0,04 \Leftrightarrow$
$0,05 \,.\, x\% = 0,0255 \Leftrightarrow x\% = 0,51 = 51\% = 10,2\ (5\%)$
Resposta: E

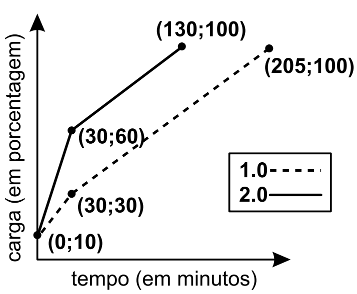
QUESTÃO 29

O *quick charge* é uma tecnologia desenvolvida para alimentar rapidamente parte da capacidade da bateria de um *smartphone*. Essa tecnologia já foi comercializada em duas versões, chamadas de 1.0 e 2.0. A ilustração a seguir mostra um comparativo dessa tecnologia e da recarga convencional para um período de 30 minutos, considerando uma bateria com 0% de carga.

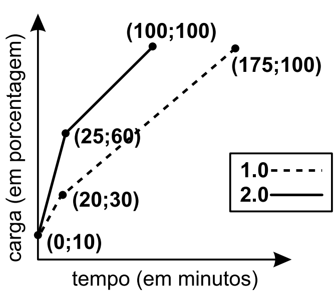


A tecnologia *quick charge* 2.0 e 1.0 passa a oferecer uma velocidade de recarga igual à convencional quando a bateria atinge 60% e 30% de carga, respectivamente. O gráfico que representa corretamente o carregamento completo de um *smartphone* com 10% de carga em sua bateria, em função do tempo de recarga, em minutos, utilizando a tecnologia *quick charge* 2.0 ou 1.0 é:

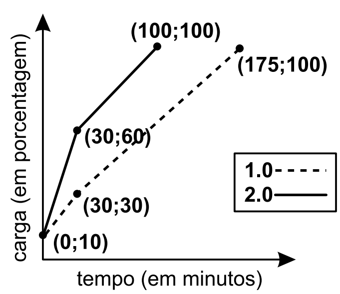
a)



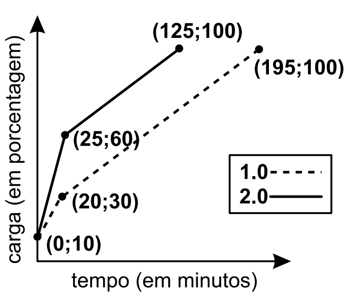
b)



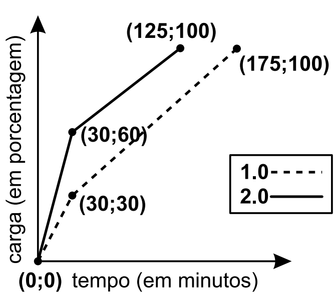
c)



d)



e)



RESOLUÇÃO

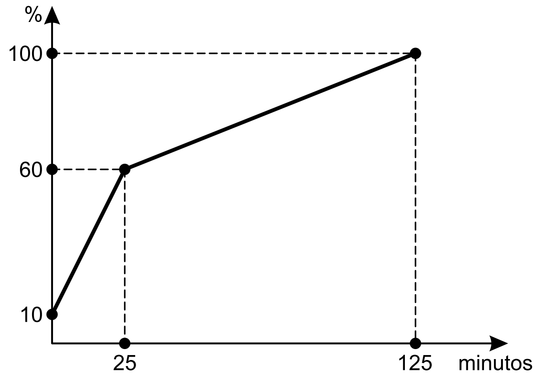
Para a *quick charge 2.0*, lembrando que o aparelho já está com 10% da carga, tem-se:

1) $\begin{array}{l} 30 \text{ min} \text{ ——— } 60\% \\ x \text{ min} \text{ ——— } 50\% \end{array} \Rightarrow x = \dfrac{50 \,.\, 30}{60} = 25$

2) Seja t o tempo total para carregar o aparelho. Os 40% restantes serão pela recarga convencional e portanto:

$\begin{array}{l} 30 \text{ min} \text{ ——— } 12\% \\ (t - 25)\text{min} \text{ ——— } 40\% \end{array} \Rightarrow t - 25 = \dfrac{40 \,.\, 30}{12} = 100 \Rightarrow t = 125$

Logo:



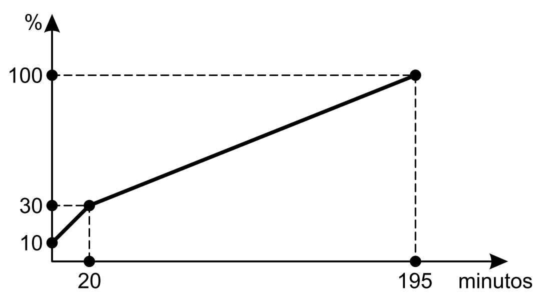
Pelas alternativas apresentadas, a única que passa pelos pontos (0;10), (25;60) e (125;100) é a *D*.

Para a *quick charge 1.0*, de modo análogo, tem-se:

1) $\begin{array}{l} 30 \text{ min} \text{ ——— } 30\% \\ x \text{ min} \text{ ——— } 20\% \end{array} \Rightarrow x = \dfrac{20 \,.\, 30}{30} = 20$

2) Sendo T o tempo total, para os 70% restantes de recarga convencional, tem-se:

$\begin{array}{l} 30 \text{ min} \text{ ——— } 12\% \\ (T - 20)\text{min} \text{ ——— } 70\% \end{array} \Rightarrow T - 20 = \dfrac{70 \,.\, 30}{12} = 175 \Rightarrow T = 195$

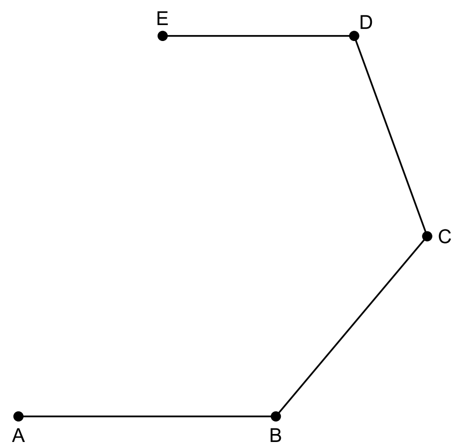


Confirmando a primeira parte, a única curva que passa pelos pontos (0;10), (20;30) e (195;100) é a *D*.

Resposta: D

QUESTÃO 30

Uma espécie de espiral é composta por segmentos de reta ligados por suas extremidades de modo que os comprimentos dos segmentos e os ângulos formados estejam ambos em progressão aritmética. A figura a seguir é um exemplo desta espiral.

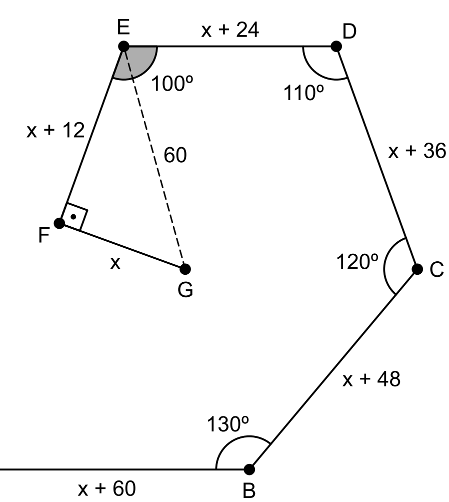


Considere uma espiral deste tipo com a razão da PA formada pelos comprimentos dos segmentos igual –12 e a razão da PA formada pelos ângulos B, C, D, E, F, G, ... igual a –10, com B igual a 130 graus. Sabendo-se que o segmento EG mede 60 cm, a medida do segmento AB é igual a:

a) 96 cm b) 48 cm c) 84 cm d) 108 cm e) 72 cm

RESOLUÇÃO

De acordo com o enunciado, e sendo *x* a medida de FG, podemos construir a seguinte figura:



No triângulo retângulo EFG, temos:

$x^2 + (x + 12)^2 = 60^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 24x + 144 = 3600 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 24x - 3456 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 12x - 1728 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-12 \pm 84}{2} \Leftrightarrow x = 36 \text{ ou } x = -48 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 36$, **pois** $x > 0$

A medida do segmento $\overline{AB}$**, em centímetros, é**

$x + 60 = 36 + 60 = 96$

Resposta: A